

7. Übung zur Elementaren Stochastik

Prof. Dr. Ehrhard Behrends, WS 2009/10

Ausgabe: 23. 11. 2009

Abgabe: am 1. 12. 2009 bis 16.00 Uhr in den Fächern der Tutoren

Bei einigen Aufgaben gibt es eine *-Version. Die ist für die ambitionierteren Übungsteilnehmer gedacht. Das gilt auch für die **-Aufgaben, bei denen wird unter den richtigen Lösungen auch ein Preis verlost. Bitte für jedes n auf dem gleichen Zettel höchstens eine der Aufgaben n , n^* , n^{**} bearbeiten, $n = 1, 2, 3, 4$.

1. Es seien $A, B_1, \dots, B_k$ Ereignisse. Wir sagen, dass A von $B_1, \dots, B_k$ unabhängig ist, wenn A und C unabhängig ist für alle C in der von $B_1, \dots, B_k$ erzeugten σ -Algebra. Man zeige: Sind $A_1, \dots, A_n$ Ereignisse, so sind sie genau dann unabhängig im Sinne der Definition 6.3.1, wenn gilt: A_1 ist unabhängig von $A_2, \dots, A_n$; und A_2 ist unabhängig von $A_1, A_3, A_4, \dots, A_n$; ...; und A_n ist unabhängig von $A_1, \dots, A_{n-1}$.

2. $[0, 1]$ sei mit der Gleichverteilung versehen. Geben Sie $A_1, A_2, \dots$ so an, dass

- Jedes A_k ist eine endliche Vereinigung von Teilintervallen von $[0, 1]$ und folglich ein Ereignis.
- Für alle n ist $P(A_n) \in]0, 1[$.
- Für jedes n sind die $A_1, \dots, A_n$ unabhängig.

2*. Wie vorstehend, aber $[0, 1]$ soll mit einer beliebigen stetigen und strikt positiven Dichtefunktion versehen sein.

2.** Bestimmen Sie (mit Beweis) das größtmögliche n , so dass gilt: Es gibt echte Teilintervalle $A_1, \dots, A_n$ von $[0, 1]$ (versehen mit der Gleichverteilung), so dass alle A_i positive Länge haben und die Familie $A_1, \dots, A_n$ unabhängig ist.

3. Es seien X, Y, Z unabhängige reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum. Man beweise, dass dann auch $\alpha_0 X + \alpha, \beta_0 Y + \beta, \gamma_0 Z + \gamma$ unabhängig sind für beliebige Zahlen $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha, \beta, \gamma$.

3*. Es seien X, Y, Z unabhängige reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum. Man beweise, dass dann auch $f(X), g(Y), h(Z)$ unabhängig sind, wobei $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sein sollen. (Es darf die „zweite Anwendung“ der Seite 96 1/2 in einer allgemeineren Version verwendet werden: X, Y, Z sind genau dann unabhängig, wenn die Ereignisse $X^{-1}(B_1), Y^{-1}(B_2), Z^{-1}(B_3)$ für beliebige Borelmengen B_1, B_2, B_3 unabhängig sind.)

4. Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige reellwertige Zufallsvariable.

a) Zeigen Sie, dass $Y := \max\{X_1, \dots, X_n\}$ eine Zufallsvariable ist und dass für die Verteilungsfunktion gilt:

$$F_Y(x) = F_{X_1}(x) \cdots F_{X_n}(x)$$

(für alle x).

b) Bestimmen Sie die Dichte von P_Y für den Spezialfall, dass alle P_{X_i} auf $[0, 1]$ die Dichtefunktion $2 - 2x$ haben. (Beachten Sie dabei: Ist die Verteilungsfunktion F_Y differenzierbar, so ist – nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung – die Ableitung von F_Y die Dichtefunktion von P_Y .)

Homepage der Veranstaltung: page.mi.fu-berlin.de/behrends/stochastik2009

Für den mathematischen „Arbeitsspeicher“ ...

Auf die folgenden Fragen sollte man jederzeit eine richtige Antwort geben können. Zur Not mit Hilfe eines vorbereiteten Zettels (der übrigens später bei der Klausur auch verwendet werden darf).

Was ist eine σ -Algebra? Wie ist die σ -Algebra der Borelmengen definiert? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum? Wie kann man einen Wahrscheinlichkeitsraum einfach definieren, wenn Ω höchstens abzählbar ist? Was versteht man unter a) der Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$, b) einem Laplaceraum, c) der Bernoulli-verteilung, e) der Poissonverteilung, f) der geometrischen Verteilung? Wie kann man auf einem Intervall, versehen mit der σ -Algebra der Borelmengen, einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Hilfe einer Dichtefunktion definieren? Was versteht man unter a) Gleichverteilung, b) Exponentialverteilung, c) Normalverteilung? Was wird mit dem Buffonschen Nadelexperiment approximativ berechnet? Was ist eine Zufallsvariable? Wie ist der durch eine Zufallsvariable induzierte Wahrscheinlichkeitsraum definiert? Wie ist der Erwartungswert einer Zufallsvariablen im Fall diskreter Räume und bei Räumen mit Dichte definiert? Was sind Varianz und Streuung? **Neu:** Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n -elementigen Menge auszuwählen? In welchen Fällen verwendet man die hypergeometrische Verteilung? Was ist eine maximum-likelihood-Schätzung? Was ist das Übereinstimmungs-Paradoxon? Was versteht man unter „bedingter Wahrscheinlichkeit“? Wann heißen zwei Ereignisse unabhängig? **Neu:** Was bedeutet es, dass n Ereignisse unabhängig sind? Wann sind zwei (oder allgemeiner: n) Zufallsvariable unabhängig? Was weiß man über den Erwartungswert des Produkts zweier *unabhängiger* Zufallsvariablen, was über die Varianz der Summe? Was ist das „Wurzel- n -Gesetz“?

... und hier noch Beispiele aus den „Arbeitsspeichern“ anderer Teilbereiche der Mathematik:

Ist $\mathcal{E}$ ein Mengensystem, d.h. eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge M , wie ist dann $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ definiert? Und wie $\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$? Was ist eine offene, was eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$? Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? Was ist eine stetige Funktion? Was versteht man unter dem Zwischenwertsatz? Was ist $f^{-1}(A)$, wie ist die inverse Abbildung f^{-1} definiert (falls sie existiert)? Was heißt Konvergenz für Folgen und Reihen. Was ist eine absolut konvergente Reihe? Warum ist dieser Begriff für die Stochastik wichtig? **Neu:** Was ist eine Folge in einer Menge M ?

Stochastik am Computer: Anregungen

Viele Definitionen, Ergebnisse und Verfahren sind besser zu verstehen, wenn man zur Illustration Computersimulationen zur Verfügung hat. Es wird empfohlen, sich solche Simulationen selbst zu schreiben, viele Routinen findet man schon vorgefertigt in den meisten Programmpaketen.

Unterprogramme: Zufallszahlen erzeugen können (Laplace, Bernoulli, Poisson, geometrisch, Exponentialverteilung, Normalverteilung, ...); Häufigkeitsverteilungen skizzieren können (so genannte Histogramme). Monte-Carlo-Verfahren zur approximativen Integration. **Neu:**

Projekte: Test des Zufallszahlengenerators (etwa einige Millionen gleichverteilte Zufallszahlen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ erzeugen und prüfen, ob alle Ergebnisse in etwa gleich oft vorkommen); einige Millionen Poissonverteilte Zufallszahlen erzeugen und ein Histogramm erstellen, ... Integrale ausrechnen mit Monte-Carlo-Verfahren und Güte-Test durch Vergleich mit dem exakten Ergebnis; **Neu:** Testläufe zum Übereinstimmungsparadoxon; p gleichverteilt in $[0, 1]$ wählen, dann für verschiedene k testen, wie groß die (experimentelle) bedingte Wahrscheinlichkeit für $k + 1$ Erfolge bei k Erfolgen ist.